www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

E.N.S.I. de PHYSIQUE
Commune-Mathématiques appliquées

EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

DUREE: 2H30

Les calculatrices programmables alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86.228 du 28/07/86.

Notations et objectifs

Dans tout le problème, l'entier n est donné, supérieur strictement à 1. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique $< , >$ et de la norme associée $\| \ \|_2$, définis respectivement par :

$$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

L'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels à n lignes et n colonnes est noté M_n, son sous-espace vectoriel des matrices symétriques est noté S_n.
On identifie une matrice A de M_n et l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est A ; de même on identifie les éléments x de E aux matrices colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique de E. Ces identifications donnent un sens au produit Ax.

Si A est symétrique, $\langle Ax,y \rangle = \langle x,Ay \rangle$ quel que soit le couple (x,y) d'éléments de E.
On dit que la matrice A symétrique est définie positive si:

Quel que soit x non nul dans E, $\langle Ax,x \rangle > 0$.

L'objet de ce problème est d'étudier deux algorithmes permettant de déterminer, à une approximation donnée, l'inverse d'une matrice symétrique inversible, en particulier celle d'une matrice définie positive ; c'est ce qui est fait dans les deuxième et troisième parties.

Pour l'étude des convergences des algorithmes et pour leur comparaison, on étudie dans la première partie, la norme sur S_n qui à tout élément T de S_n, associe :

$$\|T\| = \sup \{ | \langle Tx,x \rangle |, \ \|x\|_2 \leq 1 \}$$

Partie I :
Etude d'une norme sur S_n

1. *Définition d'une norme sur S_n.*

a) Soit U un élément de M_n; montrer que la fonction $x \rightarrow |\langle Ux,x \rangle|$ est bornée sur la boule unité de E, constituée des vecteurs x tels que $\|x\|_2 \leq 1$.
b) Soit U un élément de S_n tel que, pour tout x dans E, $\langle Ux,x \rangle = 0$. Prouver que, pour tout couple (x,y) d'éléments de E, $\langle Ux,y \rangle = 0$ et en déduire que U est la matrice nulle.
c) Montrer que l'application de S_n dans $\mathbb{R}$ qui à tout élément U de S_n associe le nombre réel positif :

$$\|U\| = \sup \{ | \langle Ux,x \rangle |, \ \|x\|_2 \leq 1 \}$$

est une norme sur l'espace vectoriel S_n.

2. *Propriété de multiplicativité.*

a) Soit deux matrices U et V de S_n, montrer que le produit UV appartient à S_n si et seulement si UV=VU.
b) Soit U un élément de S_n. On désigne par $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes), et par $\rho(U)$ le maximum des valeurs absolues des λ_i.
En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres de U, prouver que $\|U\| = \rho(U)$ et que, pour tout élément x de E,

$$\|Ux\|_2 \leq \|U\| \ \|x\|_2$$

c) Déduire des questions précédentes que si U et V sont deux éléments commutables de S_n (c'est-à-dire si UV = VU) alors $\|UV\| \leq \|U\| \ \|V\|$
(on commencera par prouver que $| \langle UVx,x \rangle | \leq \|Ux\|_2 \ \|Vx\|_2$).

3. *Caractérisation des matrices symétriques définies positives.*
Soit A un élément de S_n. Montrer que A est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives. En déduire qu'une matrice définie positive est inversible.

4. *Etude d'une condition d'inversibilité.*
Dans toute la suite du problème, on supposera donné un élément T de S_n tel que $\|I-T\| \leq k$ où k est un réel vérifiant $0<k<1$ (I désigne la matrice unité de M_n).
a) Etablir un encadrement des valeurs propres de T.
b) En déduire que T est définie positive.
c) En utilisant les valeurs propres de T^{-1}, prouver que $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1-k}$ et que $\|T^{-1}-I\| \leq \frac{k}{1-k}$

Tournez la page S.V.P.

page 153
1989 1

Partie II :

Un algorithme de recherche de l'inverse d'une matrice symétrique

Pour approcher l'inverse T^{-1} de T, on considère la suite (X_p) de matrices de M_n définie par la relation de récurrence :

$X_0 = I$

$X_{p+1} = X_p + I - T X_p \quad (p=0,1,2...)$

5. *Convergence de l'algorithme.*

a) Montrer que toutes les matrices X_p sont symétriques et commutent avec T.

b) Etablir que, pour tout entier p positif, $\|X_{p+1} - T^{-1}\| \leq \|I-T\| \|X_p - T^{-1}\|$

c) On pose $\varepsilon_p = \|X_p - T^{-1}\|$

Prouver que, pour tout entier p positif,

(1) $\varepsilon_p \leq \frac{k^{p+1}}{1-k}$

En déduire la limite de la suite (X_p).

d) On suppose que $T = \beta I$, où β est un nombre réel vérifiant $0<\beta<1$, et l'on prend $k = \|I-T\|$. Montrer que (1) devient alors une égalité.

6. *Application à la recherche de l'inverse d'une matrice symétrique définie positive.*

Soit A une matrice réelle symétrique définie positive de valeur propre minimum λ et de valeur propre maximum μ. On se propose d'appliquer l'algorithme précédent à la matrice $T=\alpha A$ où α est un nombre réel strictement positif choisi de façon à obtenir la meilleure valeur possible pour k. On pose $c = \|A\| \|A^{-1}\|$.

On écarte le cas trivial où $\lambda=\mu$.

Soient f, g, h les fonctions numériques définies sur $[0, +\infty[$ par:

$f(t) = |1 - \lambda t|$

$g(t) = |1 - \mu t|$

$h(t) = \text{Sup}(f(t), g(t))$

a) Prouver que pour tout élément t de $[0, +\infty[$,

$\|I-tA\| = h(t)$

b) Représenter sur un même graphique les fonctions f, g, h. Prouver que h est minimum en un point α et un seul et exprimer la valeur k de ce minimum en fonction de λ et μ, puis de c.

c) Les nombres α et k étant ainsi déterminés, prouver qu'on peut appliquer l'algorithme précédent à la matrice $T=\alpha A$. Indiquer comment cet algorithme permet d'approcher A^{-1}.

Partie III :

Un deuxième algorithme de recherche de l'inverse

On considère la suite (Y_p) de matrices de M_n définie par la relation de récurrence :

$Y_0 = I$

$Y_{p+1} = Y_p (2I - TY_p) \quad (p = 0,1,2 ...)$

7. Montrer que toutes les matrices Yp sont symétriques et commutent avec T.

8. On pose $Z_p = I - TY_p$.

a) Montrer que $Z_{p+1} = (Z_p)^2$

b) On pose $\varepsilon_p^* = \|Y_p - T^{-1}\|$

Prouver que, pour tout entier p positif,

(2) $\varepsilon_p^* \leq \frac{k^{(2^p)}}{1-k}$

(On majorera d'abord $\|Z_p\|$). En déduire la limite de (Y_p).

c) Donner un exemple où (2) devient une égalité.

9. *Comparaison des deux algorithmes.*

Un entier strictement positif r étant donné, on désigne par N(r) le plus petit entier p tel que $\frac{k^{p+1}}{1-k} \leq 10^{-r}$ et par $N^*(r)$ le plus petit entier p tel que $\frac{k^{(2^p)}}{1-k} \leq 10^{-r}$

a) Exprimer N(r) et $N^*(r)$ en fonction de r et de k.

b) Déterminer des équivalents, lorsque r tend vers $+\infty$, des expressions N(r) et $N^*(r)$.

c) On suppose $k = \frac{1}{2}$, déterminer N(r) et $N^*(r)$ pour r = 3, r = 6, r = 10.

d) Quelles conclusions tirez-vous de cette étude, relativement aux deux algorithmes étudiés ci-dessus ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail